اشتقاق الدوال المثلثية

1. ص = جا د(س) ← ص' = د'(س) جتا د(س)
2. ص = جتا د(س) ← ص' = -د'(س) جا س
3. ص = ظا د(س) ← ص' = قا² د(س) × د'(س)
4. ص = ظتا د(س) ← ص' = -د'(س) قتا² د(س)
5. ص = قتا د(س) ← ص' = -د'(س) قتا د(س) ظتا د(س)
6. ص = قا د(س) ← ص' = د'(س) قا س ظا س

الاشتقاق الضمني والبارامتري

$\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$

$\frac{d}{dx}(y^n) = n\,y^{n-1}\,\frac{dy}{dx}$

$\frac{d}{dx}(u^n) = n\,u^{n-1}\,\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dy}(x^n) = n\,x^{n-1}\,\frac{dx}{dy}$

$\frac{d}{dy}(y^n) = n\,y^{n-1}$

$\frac{d}{dx}(u^n) = n\,u^{n-1}\,\frac{du}{dx}$

قاعدة السلسلة

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}$$

المشتقات العليا
يدرس المشتق الثاني تسمى مشتق عليا

$ص^{\prime\prime}$ ، $\frac{د^2 ص}{د س^2}$

المشتق الثانية

$ص^{\prime\prime} = \frac{د^2 ص}{د س^2}$

المشتق الثالث

$ص^{\prime\prime\prime}$ ، $\frac{د^3 ص}{د س^3}$

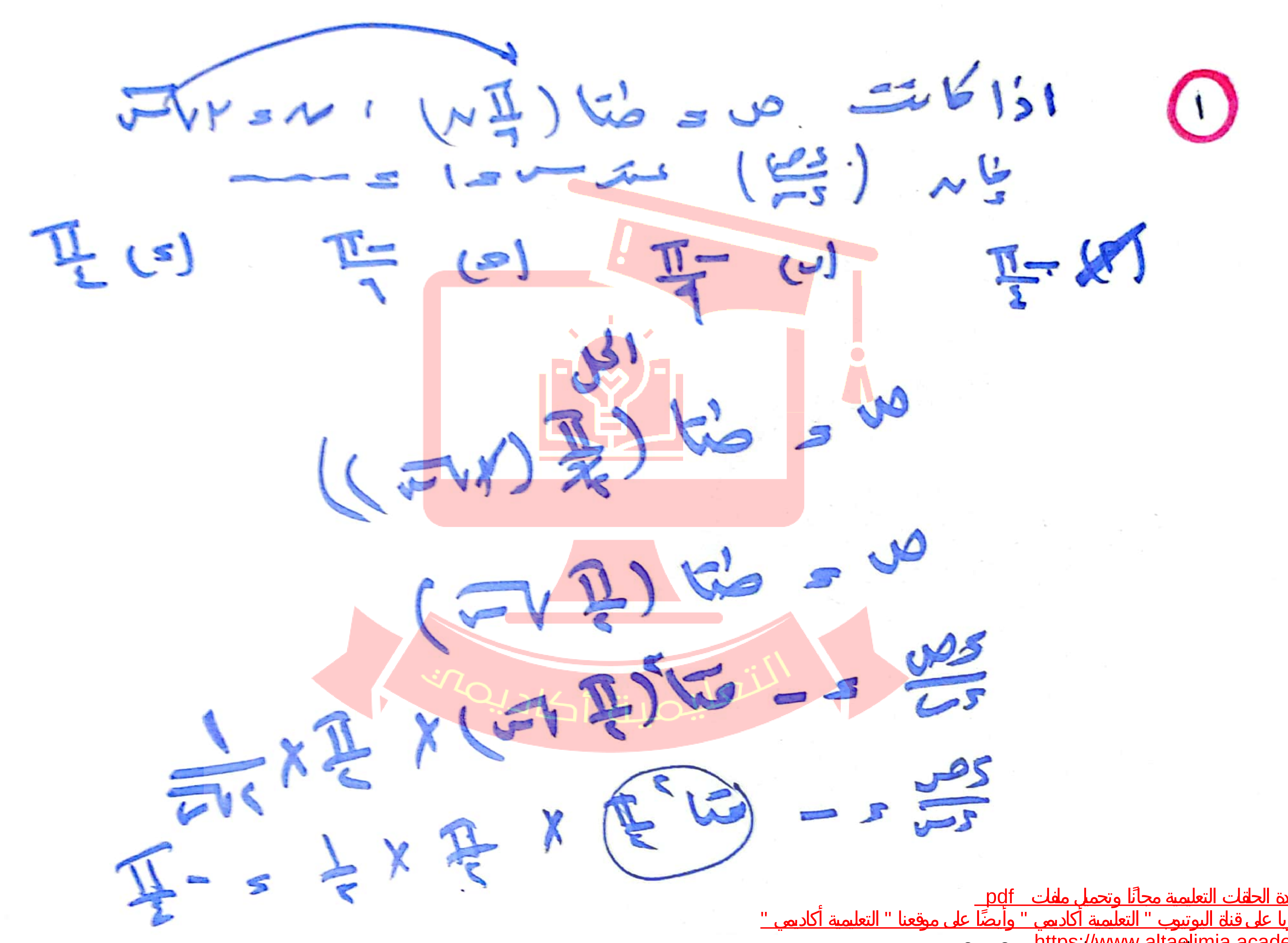
ملاحظة

$\frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = \frac{د ص}{د س} \leftarrow \frac{د^2 ص}{د ع^2} \times \frac{د ع}{د س} \neq \frac{د^2 ص}{د س^2}$

* معدل تغير ميل المماس $\frac{د}{د س}\left(\frac{د ص}{د س}\right)$

* $ص = د(ر(س))$ ، $ص^{\prime} = \frac{د}{د س}[د(ر(س))]$

$ص^{\prime} = د^{\prime}[ر(س)] \times ر^{\prime}(س)$



١) إذا كانت ص = ظتا $(\frac{\pi}{٦} س)$ ، س = ٢$\sqrt{س}$

فإن $(\frac{دص}{دس})$ عندما س = ١ = ______

(أ) $-\frac{\pi}{٤}$ (ب) $-\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $-\frac{\pi}{٦}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$

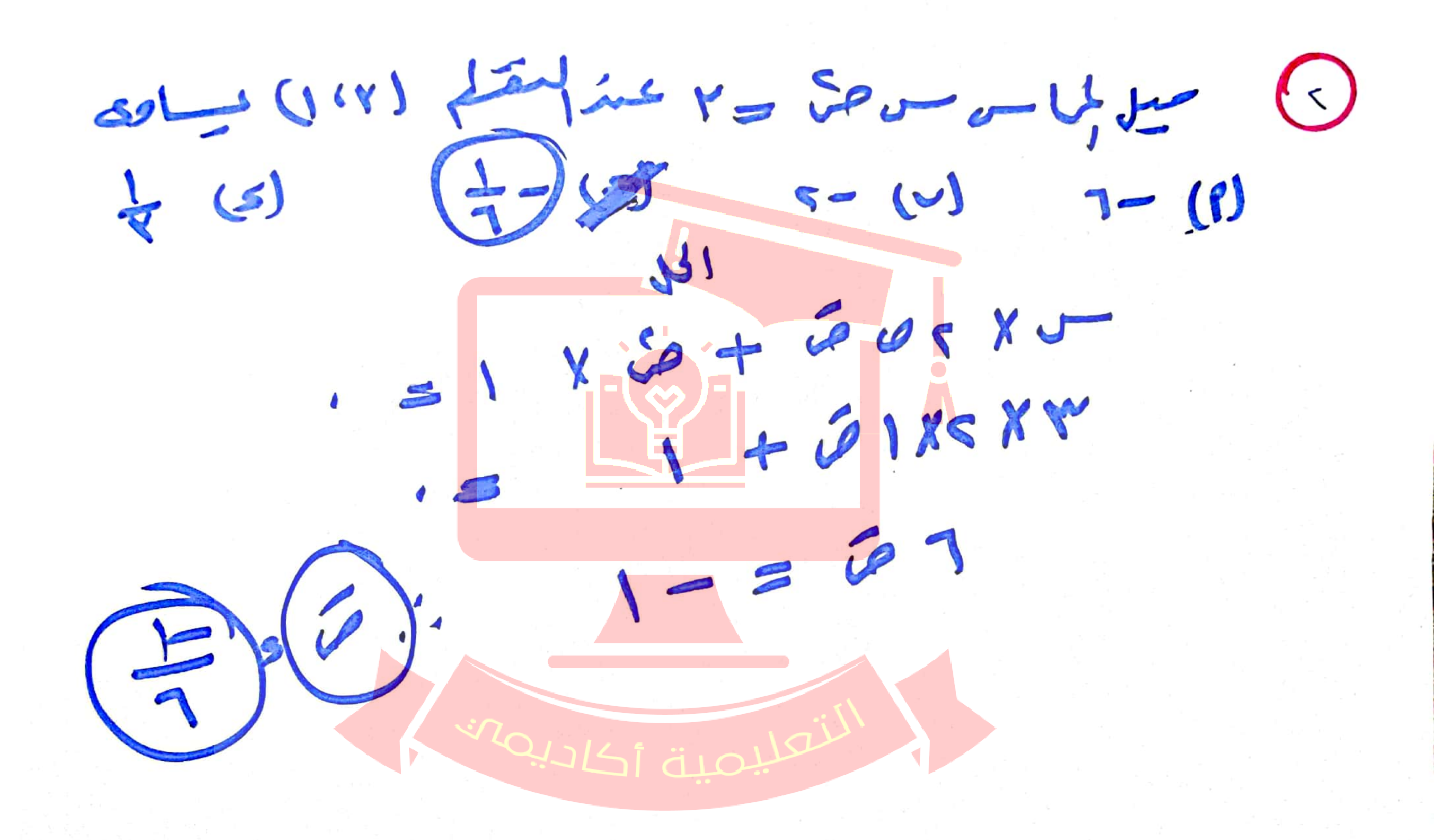
الحل

ص = ظتا $(\frac{\pi}{٦}(٢\sqrt{س}))$

ص = ظتا $(\frac{\pi}{٤}\sqrt{س})$

$\frac{دص}{دس}$ = − قتا² $(\frac{\pi}{٤}\sqrt{س})$ × $\frac{\pi}{٤}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$\frac{دص}{دس}$ = − قتا² $\frac{\pi}{٤}$ × $\frac{\pi}{٤}$ × $\frac{١}{٢}$ = $-\frac{\pi}{٤}$



٢
ميل المماس س ص^٢ = ٢ عند النقطة (٢، ١) يساوي
(أ) −٦
(ب) −٢
(ج) −١/٦
(د) ١/٤
الحل
س × ٢ ص ص′ + ص^٢ × ١ = ٠
٣ × ٢ × ١ ص′ + ١ = ٠
٦ ص′ = −١
ص′ = −١/٦

② اذا كانت $س = \frac{ع+1}{ع-1}$ ، $ص = \frac{ع-1}{ع+1}$

اوجد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ عندما ع = صفر

$$ص \times س = \frac{ع-1}{ع+1} \times \frac{ع+1}{ع-1} = 1$$

$$ص = \frac{1}{س} = س^{-1}$$

$$ص' = -1\,س^{-2}$$

$$ص'' = 2\,س^{-3}$$

$$= \frac{2}{س^3} = \frac{2}{(-1)^3} = (-2)$$

$$س = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

ب

٤) سقط في بحيرة ساكنة حجر فتولدت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٤ سم/ث اوجد معدل التغير في مساحة سطح الموجة في نهاية ٥ ثوان

$\frac{دنق}{دن} = ٤$ سم/ث

م = ط نق²

$\frac{دم}{دن}$

$\frac{دم}{دن} = ٢ط نق \times \frac{دنق}{دن}$

نق = ن × $\frac{دنق}{دن}$

نق = ٥ × ٤ = ٢٠

$\frac{دم}{دن} = ط \times ٢ \times ٢٠ \times ٤ = ١٦٠ط$ سم²/ث

⑤ اذا كانت د(س) = قاس فاوجد د̈ ($\frac{\pi}{3}$)

(أ) $2\sqrt{3}$　(ب) ٦　(جـ) ٨　(د) ١٤

ضلع ٢، ١، $\sqrt{3}$، الزاويتان ٦٠ و ٣٠

د(س) = قاس

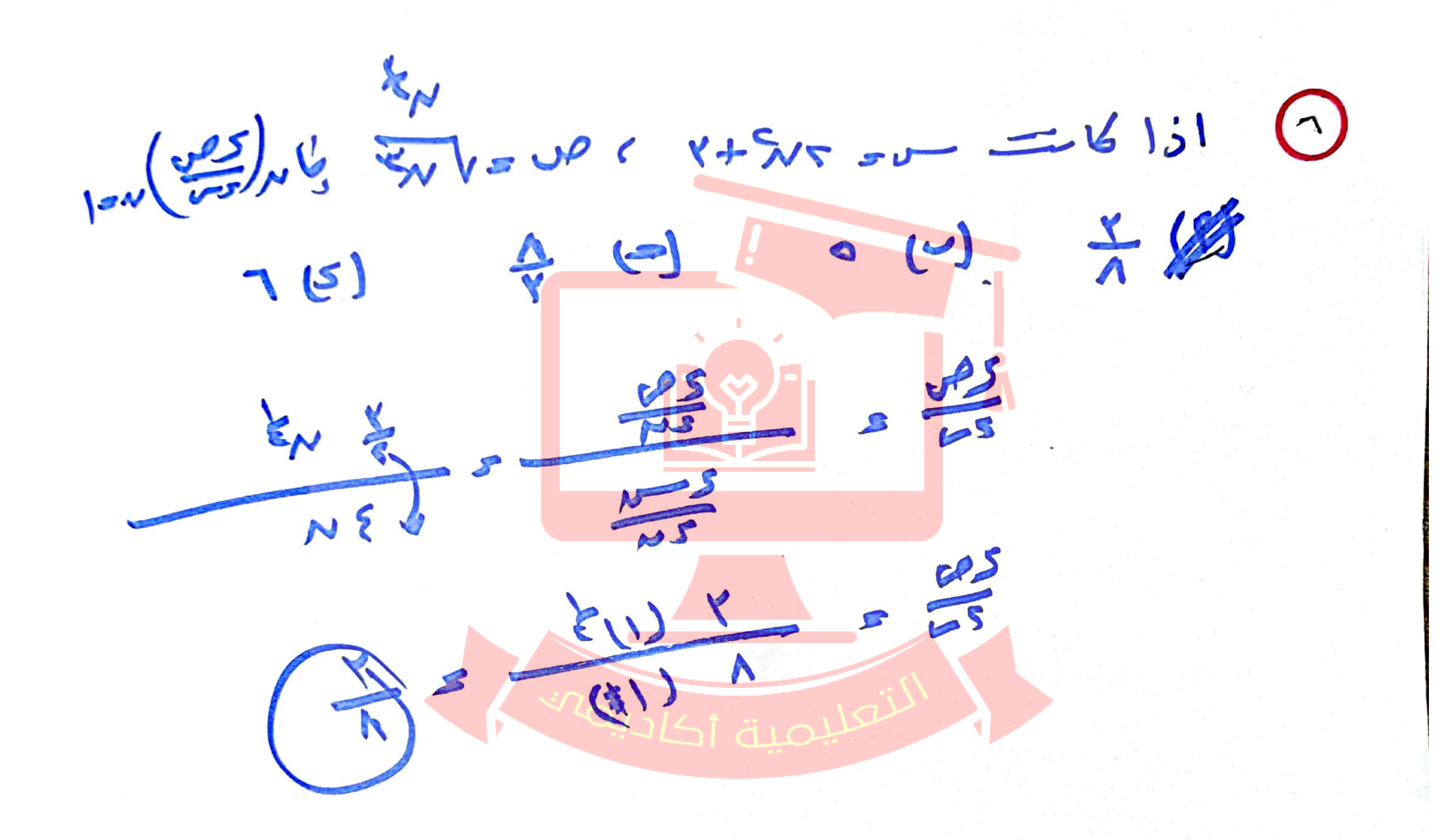
د̃(س) = قاس طاس

د̈(س) = قاس × قاس + طاس × قاس طاس

د̈($\frac{\pi}{3}$) = قا٦٠ × قا٦٠ + طا٦٠ × قا٦٠ × طا٦٠

= ٢ × ٢ + $\sqrt{3}$ × ٢ × $\sqrt{3}$

= ٨ + ٦ = ١٤



٦) اذا كانت س = ٢ن^٢ + ٢ ، ص = $\sqrt{ن^٣}$ = ن^(٣/٢) فإن $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{ن=١}$ =

(أ) ٣/٨ (ب) ٥ (ج) ٨/٢ (د) ٦

$\frac{دص}{دس} = \frac{\frac{دص}{دن}}{\frac{دس}{دن}} = \frac{\frac{٣}{٢} ن^{١/٢}}{٤ن}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{\frac{٣}{٢} (١)^{١/٢}}{٤(١)} = \frac{٣}{٨}$

(٧) مستطيل طوله ٤٤ سم وعرضه ١٠ سم يتناقص طوله بمعدل ٢ سم/ث بينما يتزايد عرضه بمعدل ١,٥ سم/ث اوجد معدل تغير مساحته بعد مضي ٤ ثوان ثم اوجد الزمن الذى تتوقف فيه المساحة عن التزايد

١٠ + ١,٥ن

٤٤ − ٢ن

م = الطول × العرض

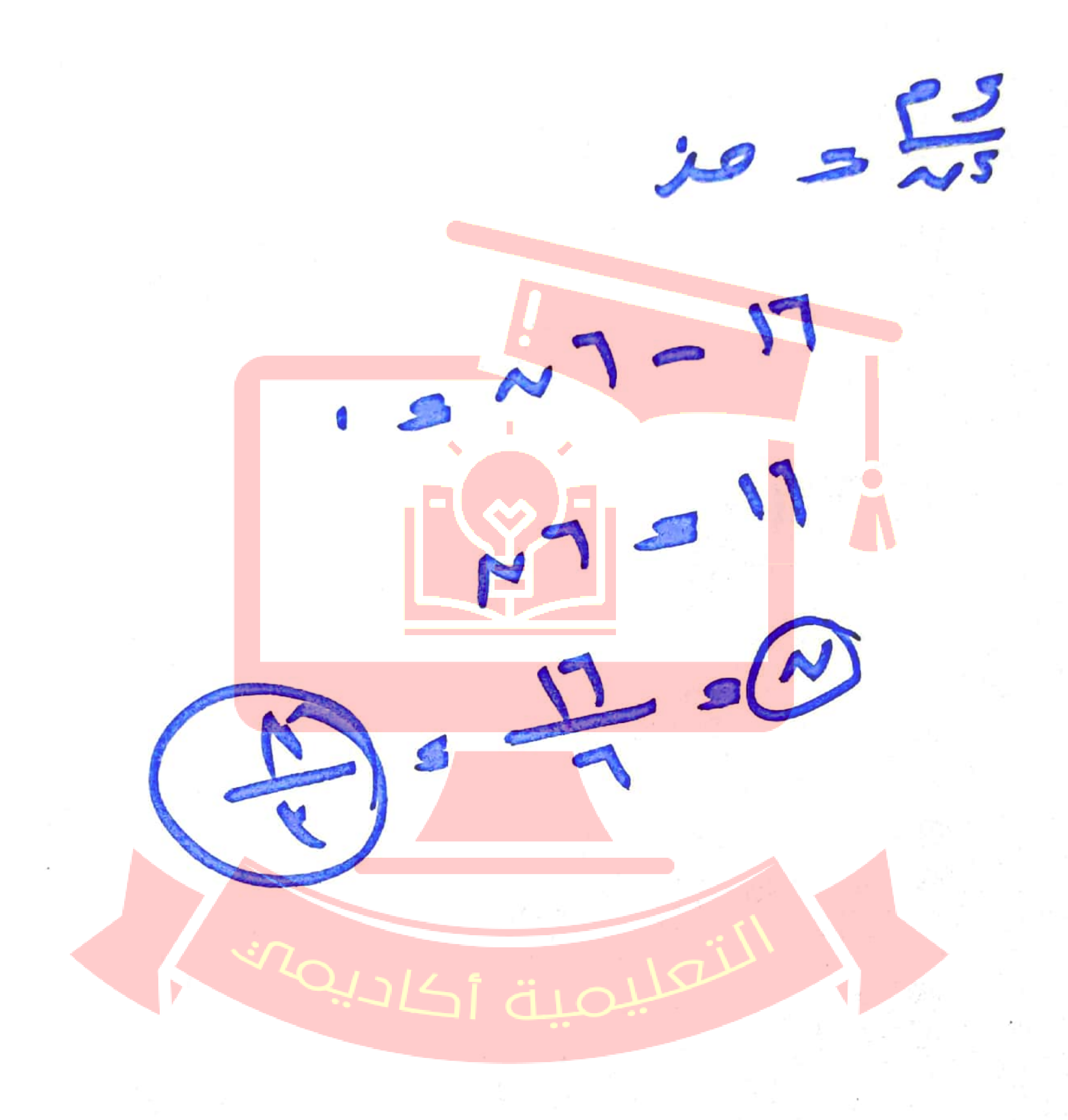
م = (٤٤ − ٢ن)(١٠ + ١,٥ن)

م = ٤٤٠ + ٦٦ن − ٢٠ن − ٣ن²

م = ٤٤٠ + ١٦ن − ٣ن²

دم/دن = ١٦ − ٦ن = ١٦ − ٦ × ٤ = −٨

$\frac{دص}{دس} = صفر$



$١٦ - ٦س = ٠$

$١٦ = ٦س$

$س = \frac{١٦}{٦} = \frac{٨}{٣}$

(٨) إذا كانت ق(س) = س د(س) وكانت د(٢) = -٥ فإن ق''(٢) = ______

(أ) -٥٠ (ب) ٤ (ج) ١٥ (د) ٢٧

ق'(٢) = ٣ × د(٢)

= ٣ × -٥ = -١٥

ق'(س) = س د(س)

ق''(س) = س × ق'(س) + د(س) × ١

ق''(٢) = ٢ × ق'(٢) + د(٢)

= ٢ × -١٥ + (-٥) = -٥٠

⑨ أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى س = قا θ / ص = ظا θ

عند θ = $\frac{\pi}{4}$

ميل ء = $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{\frac{دص}{دθ}}{\frac{دس}{دθ}}$ = $\frac{قا^2 θ}{قا θ \, ظا θ}$

ميل المماس = $\frac{قا θ}{ظا θ}$ = $\frac{قا\ 0.2}{ظا\ 0.2}$ = $\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

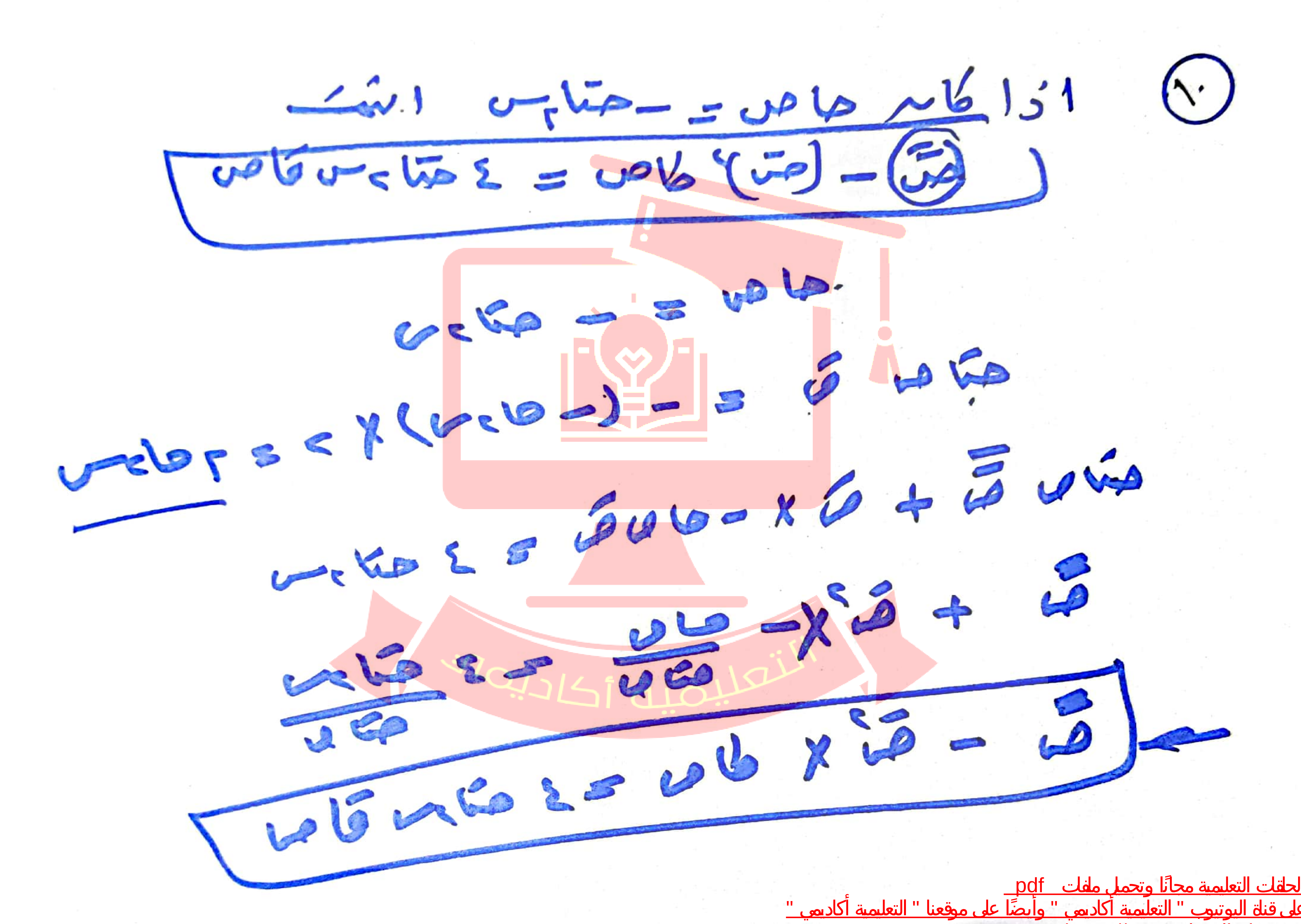
ميل العمودي = $-\frac{1}{2}$

س = قا ٠٫٢ = $\frac{2}{\sqrt{2}}$

ص = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$ص - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\left(س - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$ص - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\left(س - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$



(١٠) إذا كان ص حاص = −حتا ٢س اثبت أن

ص'' − (ص')² طاص = ٤ حتا ٢س قاص

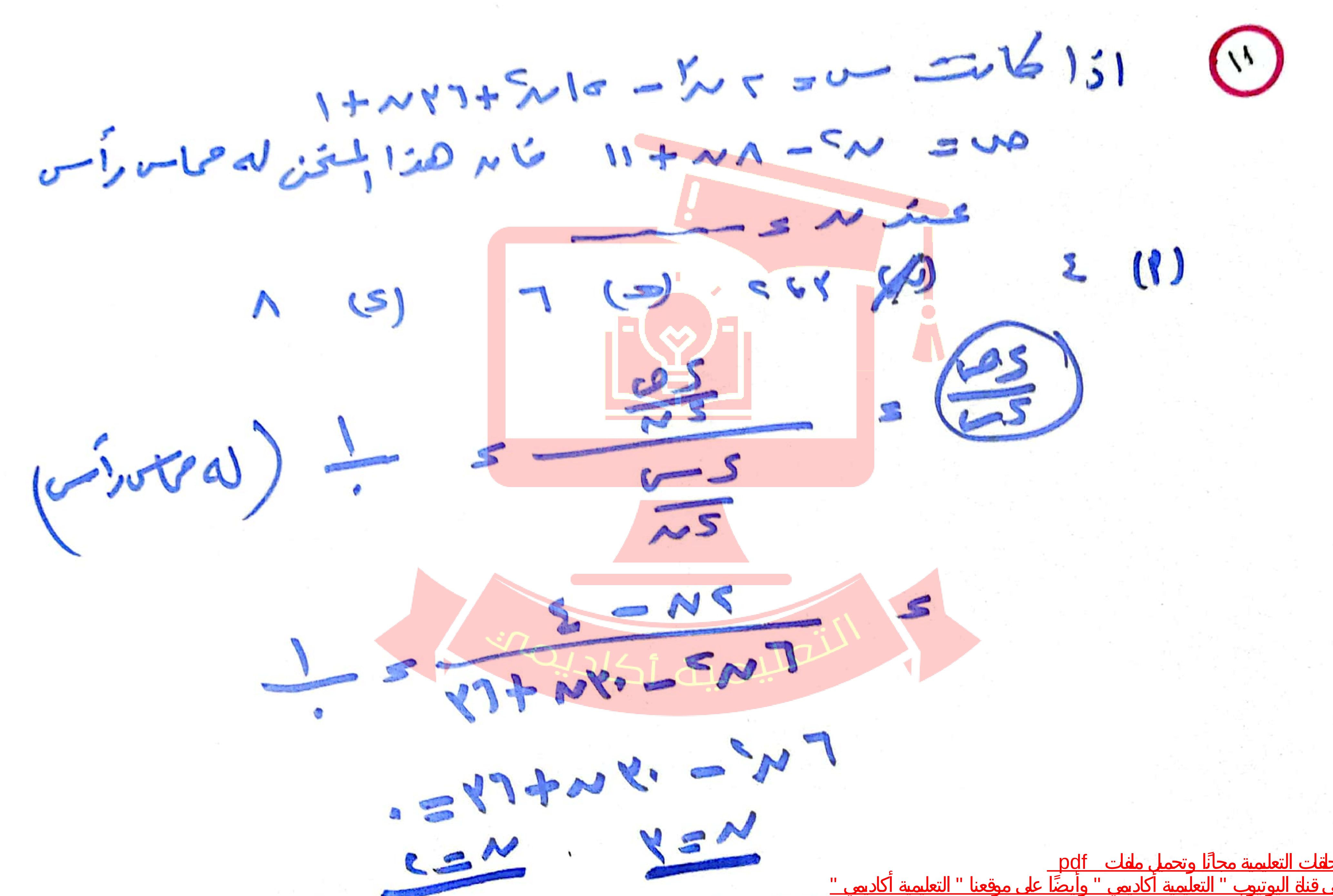
حاص = −حتا ٢س

حتاص ص' = −(−حا ٢س) × ٢ = ٢ حا ٢س

حتاص ص'' + ص' × −حاص ص' = ٤ حتا ٢س

ص'' + ص'² × − حاص / حتاص = ٤ حتا ٢س / حتاص

ص'' − ص'² × طاص = ٤ حتا ٢س قاص



(١١) إذا كانت $س = ٢ع^{٣} - ١٥ع^{٢} + ٣٦ع + ١$

$ص = ع^{٢} - ٨ع + ١١$ فإن هذا المنحنى له مماس رأسي

عند ع = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ ، ٣ (جـ) ٦ (د) ٨

$$\frac{دص}{دس} = \frac{\frac{دص}{دع}}{\frac{دس}{دع}} = \frac{١}{٠} \text{ (مماس رأسي)}$$

$$\frac{٢ع - ٨}{٦ع^{٢} - ٣٠ع + ٣٦} = \frac{١}{٠}$$

$٦ع^{٢} - ٣٠ع + ٣٦ = ٠$

$ع = ٢$ ، $ع = ٣$

(١٣) المماس للمنحنى س = جتا ٢ θ ، ص = جا ٢ θ عندما θ = صفر يكون

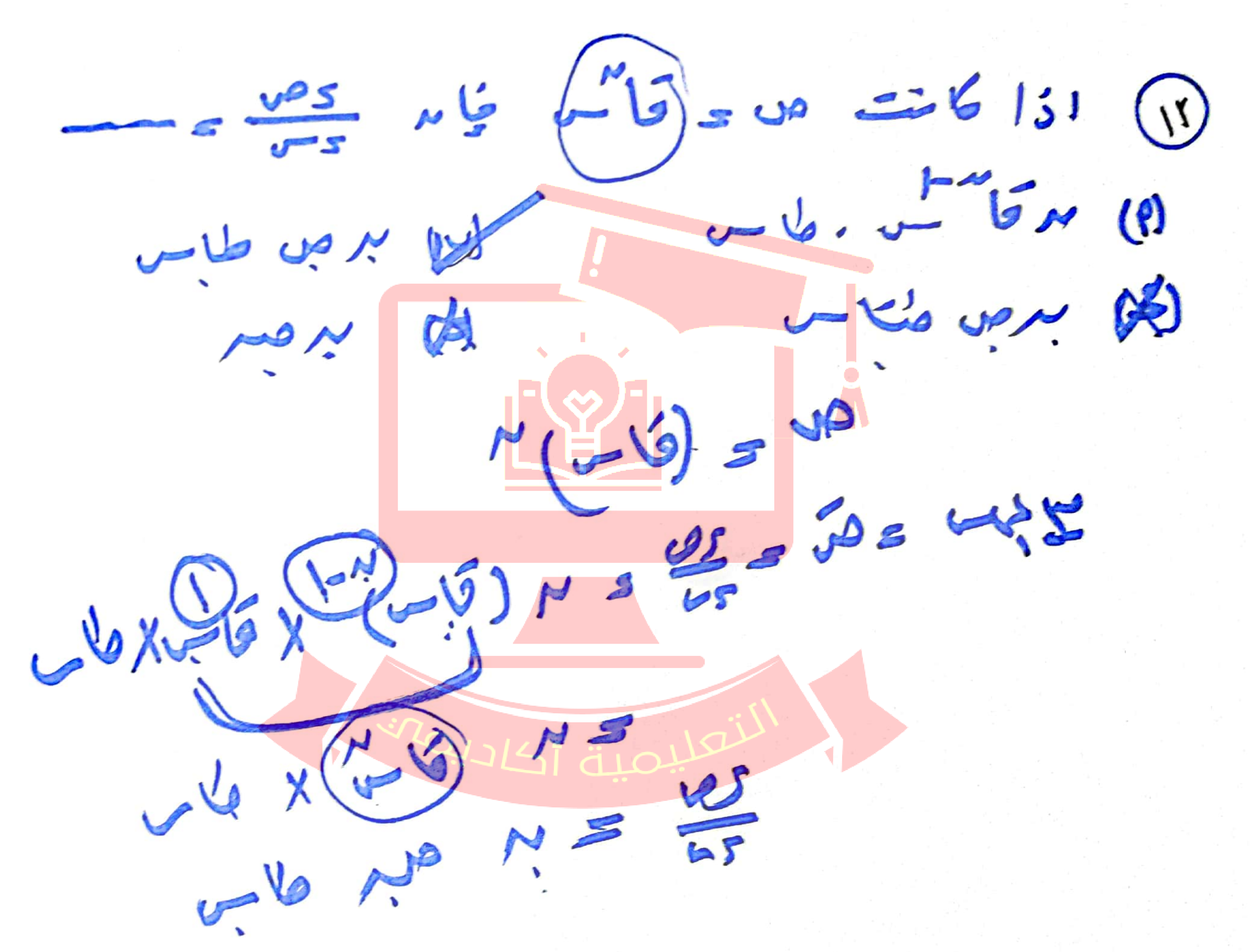
(أ) موازى لمحور الصادات (ب) موازى لمحور السينات

(جـ) موازى للمستقيم ص = س (د) موازى للمستقيم ص = -س

$\frac{دص}{دس} = \frac{\frac{دص}{دθ}}{\frac{دس}{دθ}} = \frac{٢ جتا ٢ θ × ٢}{- ٢ جا ٢ θ × ٢}$

عند θ = صفر $= \frac{١ × ٢}{صفر × ٢} = \frac{٢}{٠}$ غير معرف

∴ موازى لمحور الصادات



(١٢) إذا كانت $ص = قا^{٣}س$ فإن $\frac{دص}{دس} =$ ______

(أ) $٣قا^{٣}س \cdot طاس$ (ب) $٣ص طاس$ ✓

(ج) $٣ص جتاس$ (د) $٣ص جـ$

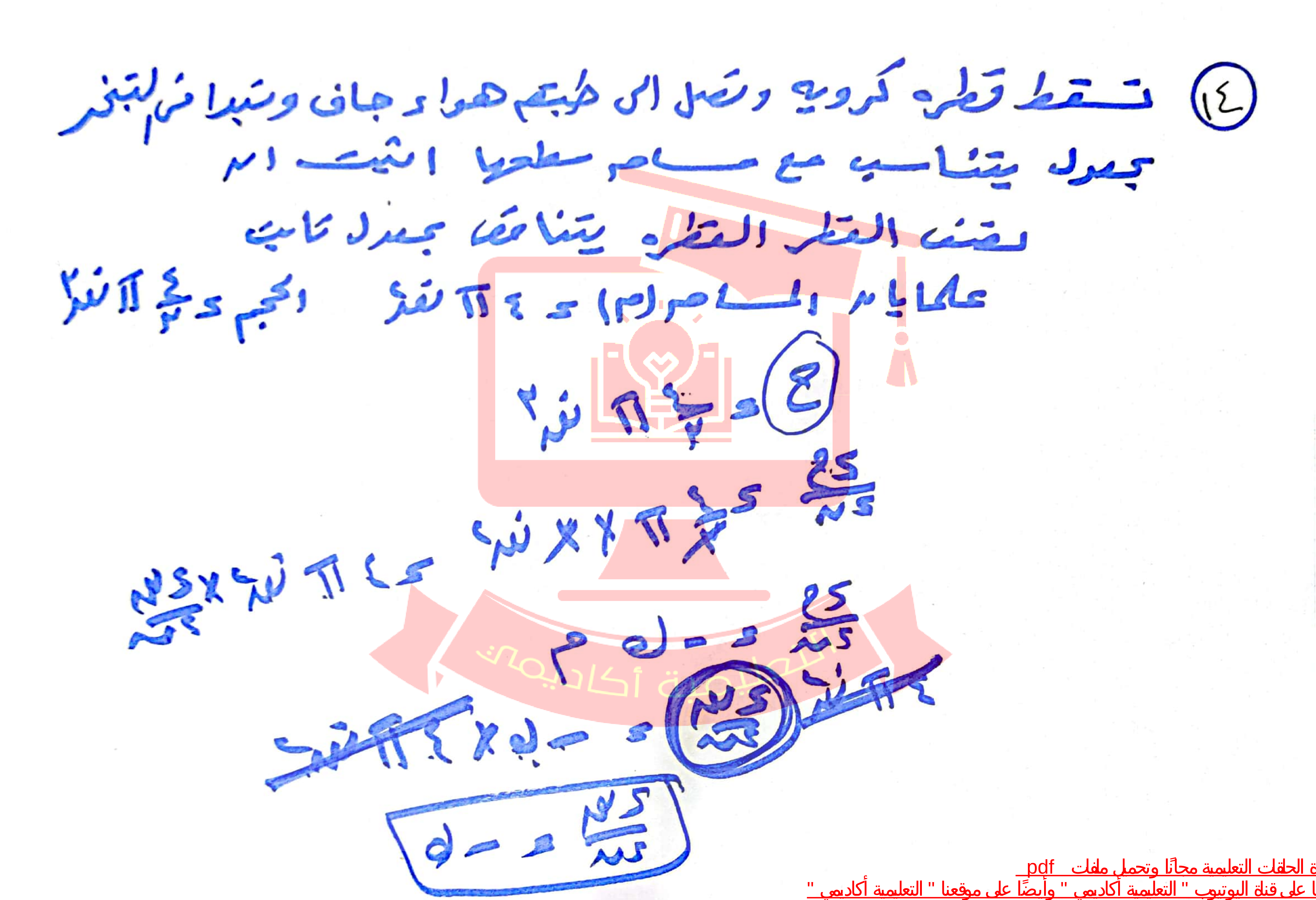
$ص = (قاس)^{٣}$

بالاشتقاق:

$\frac{دص}{دس} = ٣(قاس)^{٢} \times قاس \times طاس$

$\frac{دص}{دس} = ٣ قا^{٣}س \times طاس$

$= ٣ ص طاس$



١٤) تسقط قطرة كروية وتصل الى طبقة هواء جاف وتبدأ في التبخر بمعدل يتناسب مع مساحة سطحها اثبت ان نصف القطر للقطرة يتناقص بمعدل ثابت

علماً بأن المساحة (م) = ٤ ط نق٢ ، الحجم = $\frac{٤}{٣}$ ط نق٣

ح = $\frac{٤}{٣}$ ط نق٣

$\frac{دح}{دن}$ = $\frac{٤}{٣}$ ط × ٣ × نق٢ × $\frac{دنق}{دن}$

= ٤ ط نق٢ × $\frac{دنق}{دن}$

$\frac{دح}{دن}$ = − ل م

٤ ط نق٢ $\frac{دنق}{دن}$ = − ل × ٤ ط نق٢

$\frac{دنق}{دن}$ = − ل

(١٥) إذا كانت ص = قا $\frac{س}{٢}$ + قا $\frac{\pi}{٢}$ فإن $\frac{دص}{دس}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ قا $\frac{س}{٢}$ ظا $\frac{س}{٢}$

(ب) ٢ قا $\frac{س}{٢}$ ظا $\frac{س}{٢}$

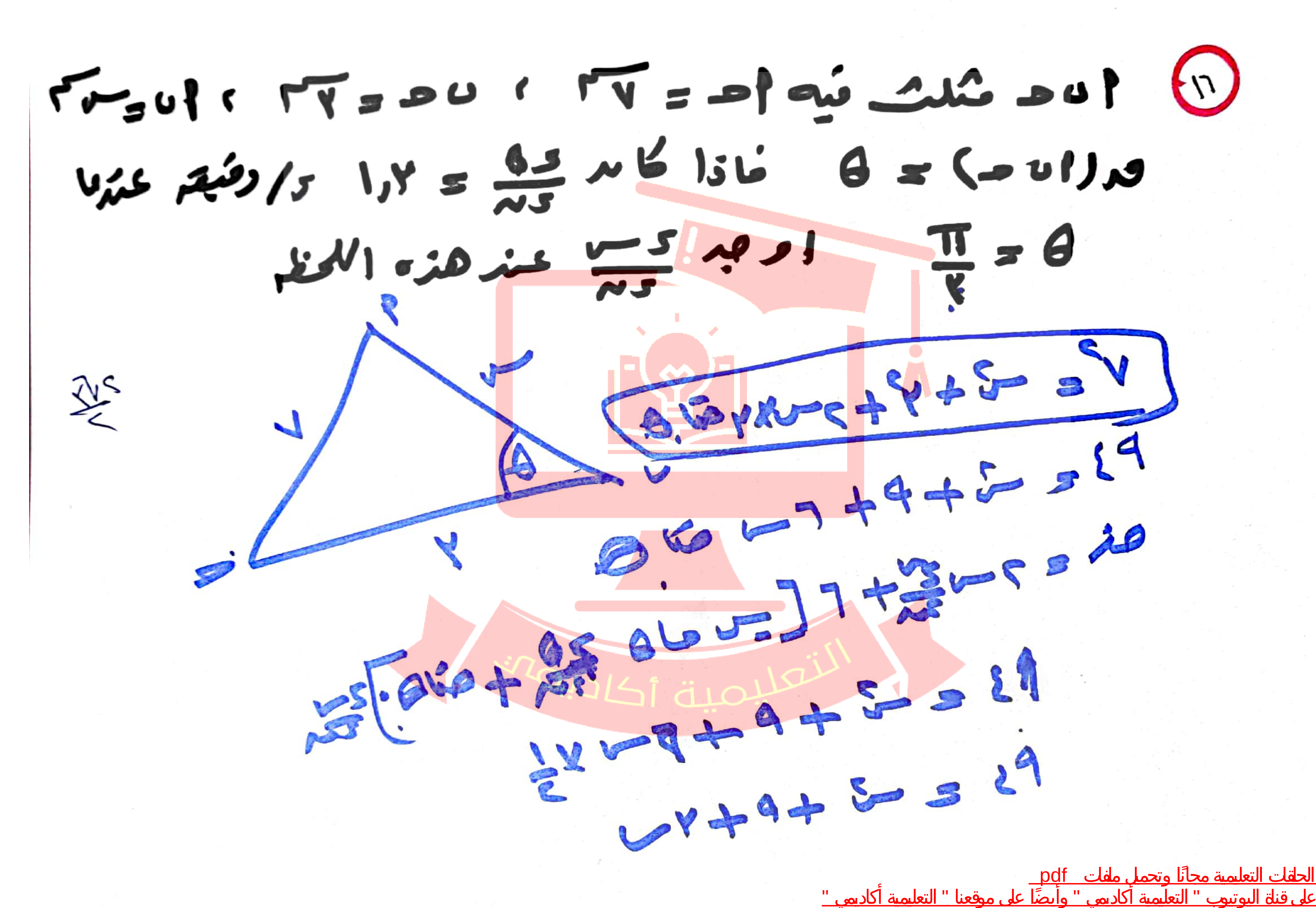
(ج) $\frac{١}{٢}$ قا $\frac{س}{٢}$ ظا $\frac{س}{٢}$ + $\sqrt{٢}$

(د) $\frac{١}{٢}$ قا $\frac{س}{٢}$ ظا $\frac{س}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ قا $\frac{\pi}{٢}$ ظا $\frac{\pi}{٢}$

ص = قا $\frac{س}{٢}$ + قا $\frac{\pi}{٢}$

$\frac{دص}{دس}$ = قا $\frac{س}{٢}$ ظا $\frac{س}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$

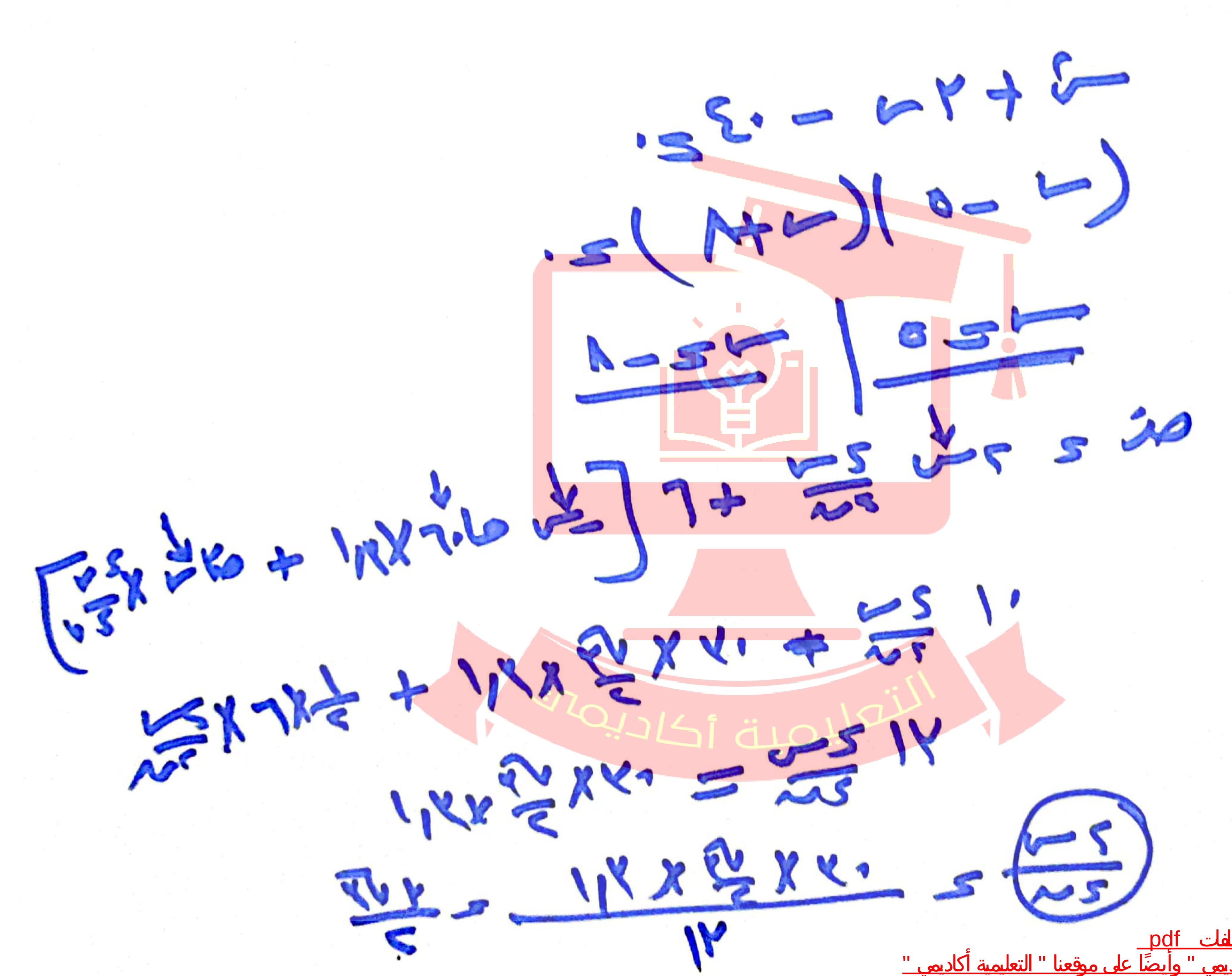
$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٢}$ قا $\frac{س}{٢}$ ظا $\frac{س}{٢}$

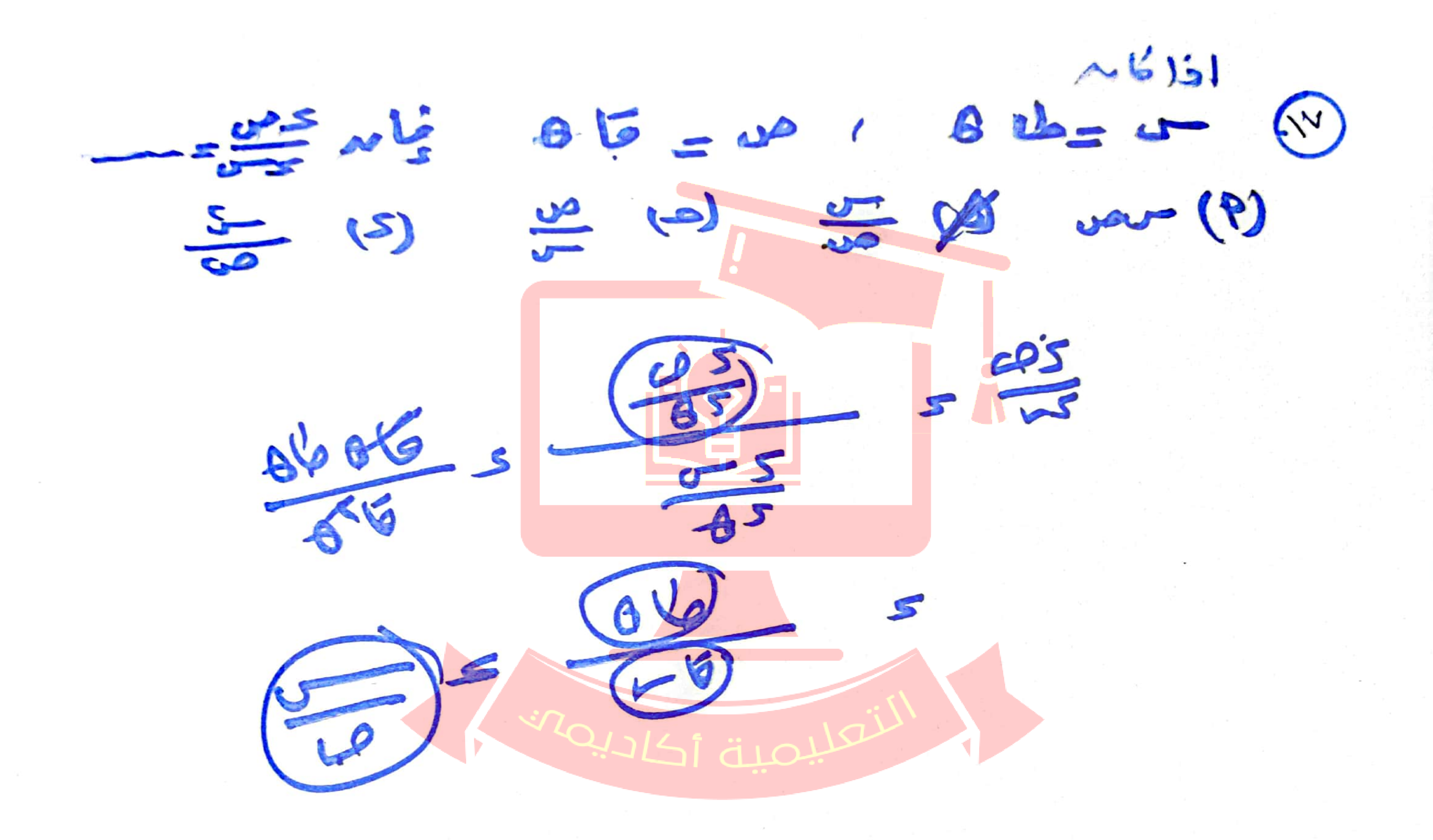


١٦) أ ب ح مثلث فيه أح = $\sqrt{٧}$٣ ، ب ح = $\sqrt{٢}$٣ ، أ ب = س سم

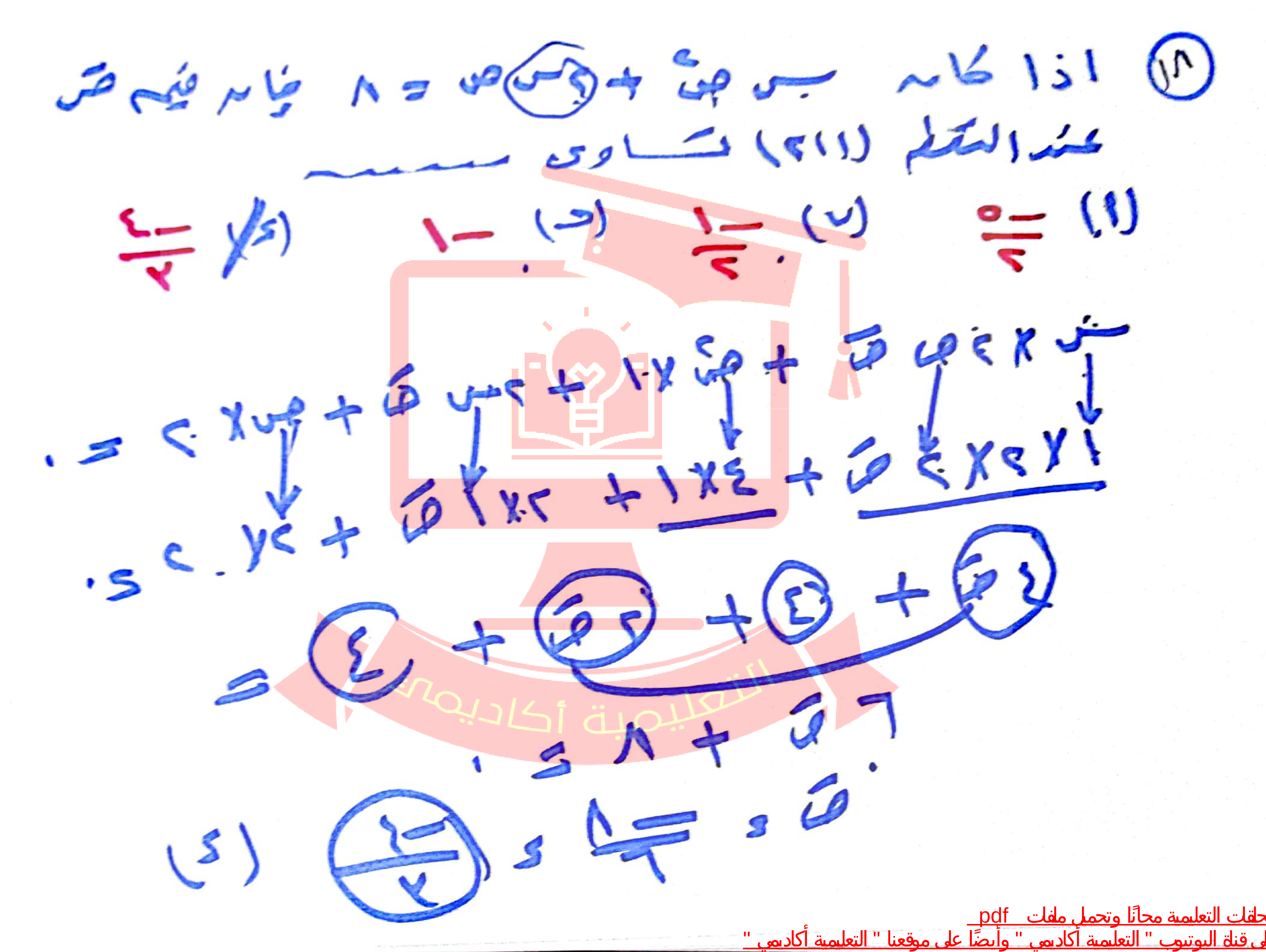
ق(أ ب ح) = θ فإذا كان $\frac{دθ}{دن}$ = ١,٢ د/دقيقة عندما

θ = $\frac{\pi}{٣}$ أوجد $\frac{دس}{دن}$ عند هذه اللحظة





اذا كان
(١٧) س = ظا θ ، ص = قا θ فإن دص/دس = ——
(أ) جا θ (ب) س/ص (ج) ص/س (د) ٢س/ص
دص/دس = (دص/دθ) / (دس/دθ) = قاθ ظاθ / قا²θ
= ظاθ / قاθ = س/ص
التعليمية أكاديمي


(١٨) اذا كانت س ص٢ + ٢س ص = ٨ فإن قيمة ص'
عند النقطة (٢،١) تساوي ....
(أ) -٥/٢ (ب) -١/٢ (جـ) -١ (د) -٤/٣
س × ٢ص ص' + ص٢ × ١ + ٢س ص' + ص × ٢ = ٠
١ × ٢ × ٢ ص' + ٤ × ١ + ٢ × ١ ص' + ٢ × ٢ = ٠
٤ص' + ٤ + ٢ص' + ٤ = ٠
٦ص' + ٨ = ٠
ص' = -٨/٦ = -٤/٣ (د)
التعليمية أكاديمي

(١٩) طائرة تطير أفقيا على ارتفاع ٢٠٠٠ متر من سطح الارض بسرعة ٤٨٠ كم/س وتمر مباشرة فوق محطة الرصد على الارض

اوجد معدل تغير المسافة بين الطائرة ومحطة الرصد بعد ٢٠ ثانية

٢٤/٢

بعد ٢٠

$\frac{دس}{دن} = 480 \times \frac{5}{18} = \frac{400}{3}$

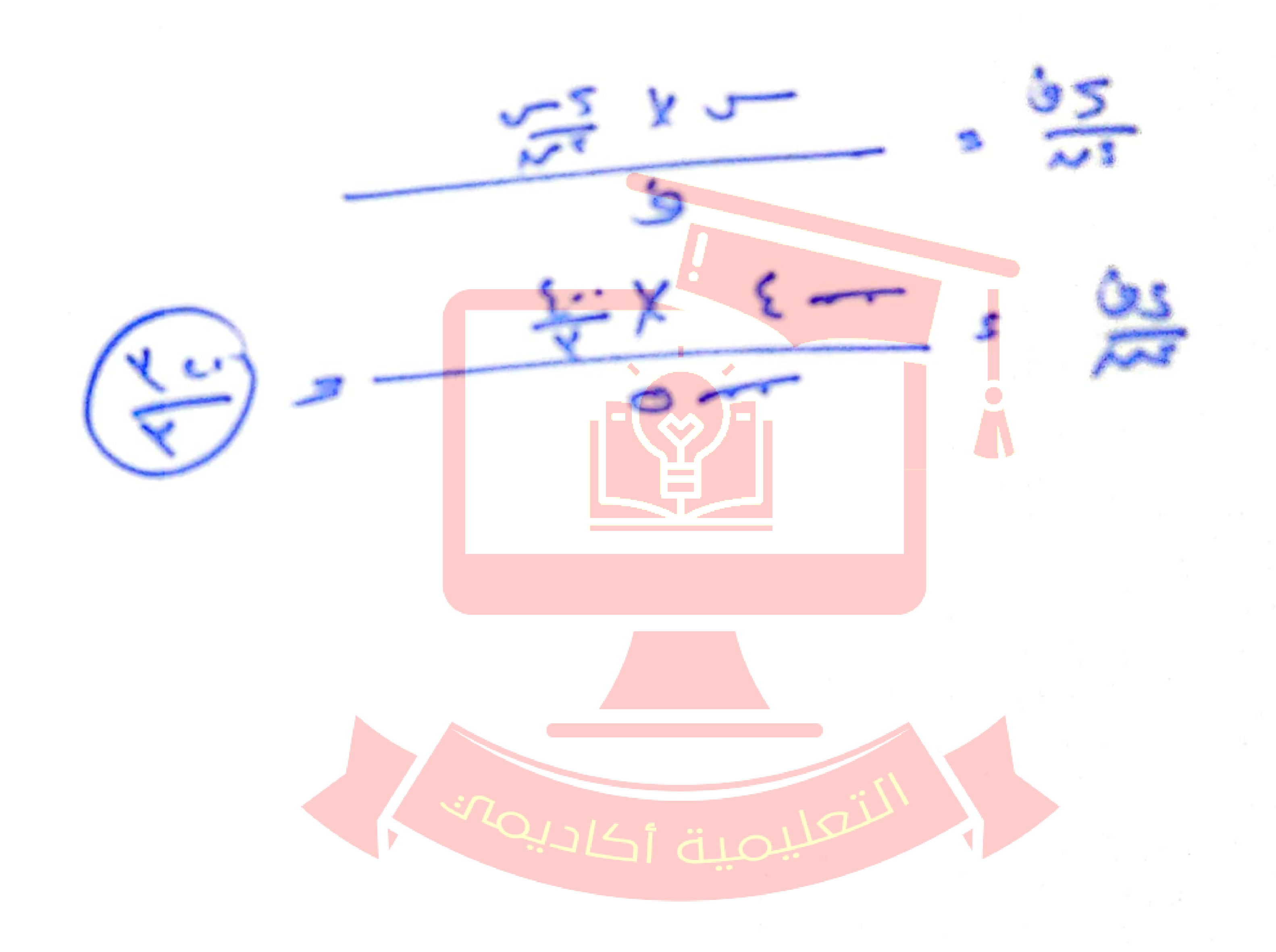
$س = \frac{400}{3} \times 20 = 4000$ ← ٤٠٠٠ (handwritten figures partly unclear)

$ف^2 = س^2 + (2000)^2$

$\therefore ف = 5000$

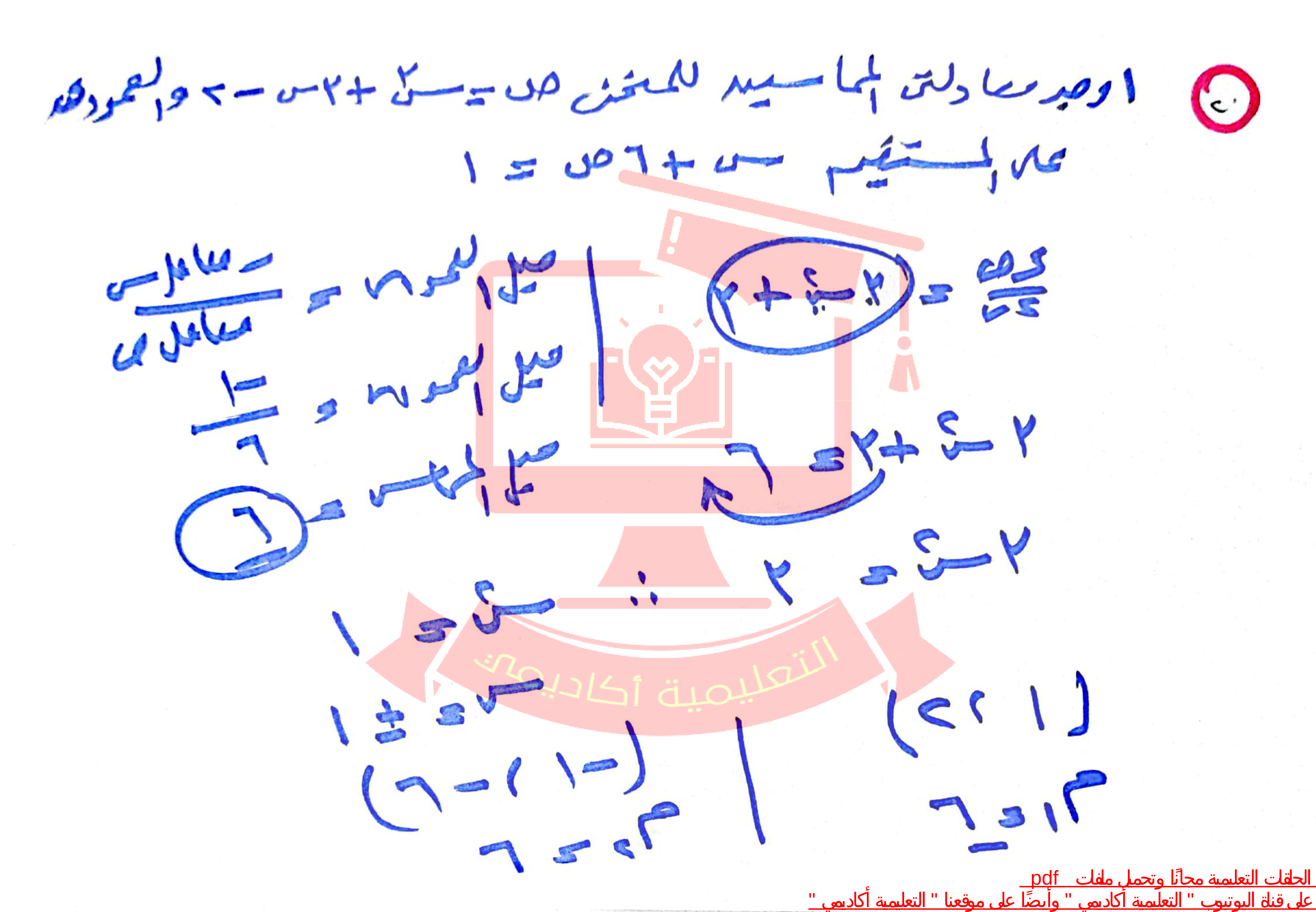
$2ف \frac{دف}{دن} = 2س \frac{دس}{دن}$

س ، ٢٠٠٠م ، ف



$$\frac{دف}{دن} = \frac{س \times \frac{دس}{دن}}{ف}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٤ \text{ سم} \times \frac{٤٠٠}{٣}}{٥ \text{ سم}} = \frac{٣٢٠}{٣}$$


ب) أوجد معادلتي المماسين للمنحنى ص = س³ + ٣س − ٢ والعمودين على المستقيم س + ٦ص = ١

$\frac{دص}{دس}$ = ٣س² + ٣

ميل العمود = $\frac{-معامل\ س}{معامل\ ص}$

ميل العمود = $\frac{-١}{٦}$

ميل المماس = ٦

٣س² + ٣ = ٦

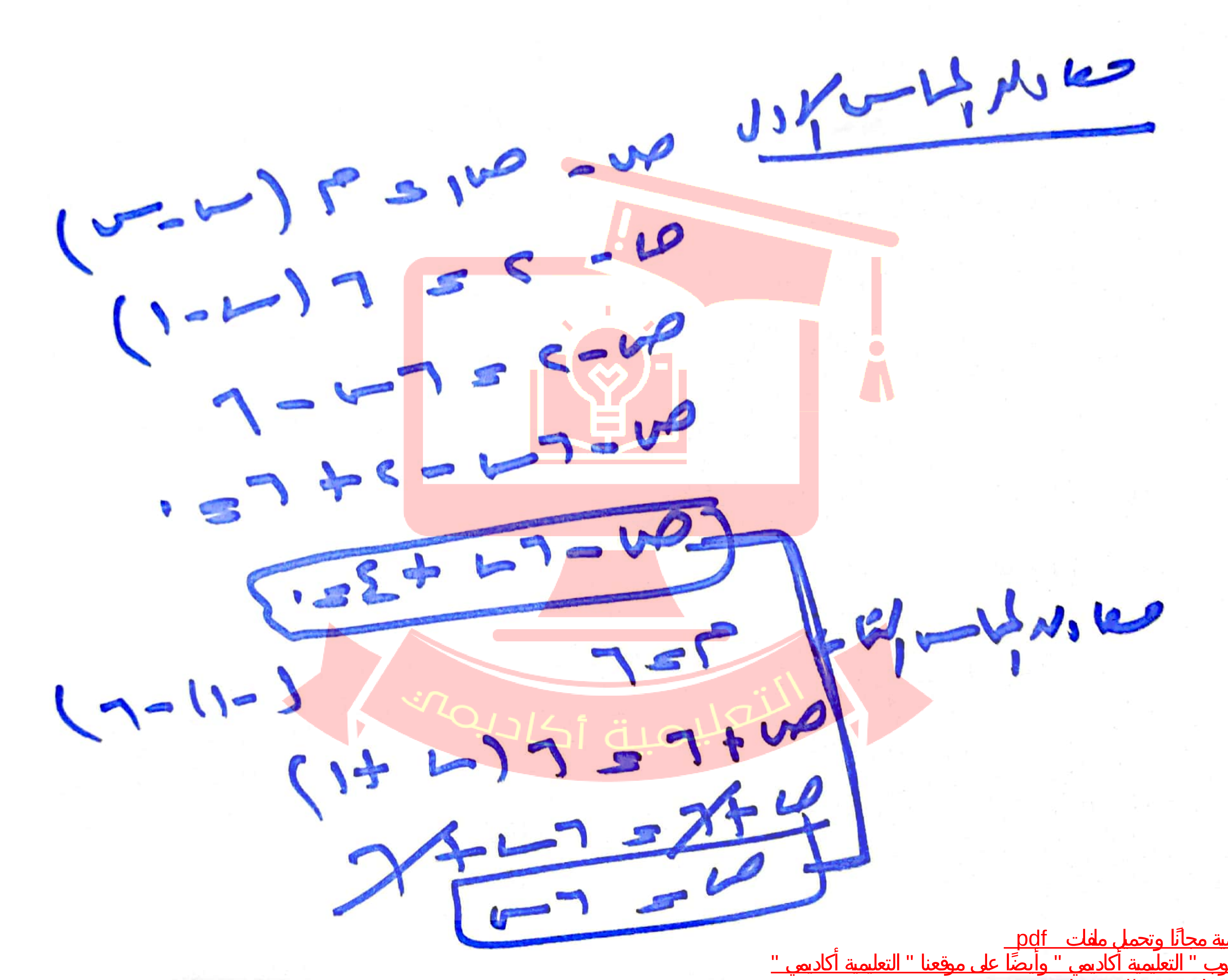
٣س² = ٣

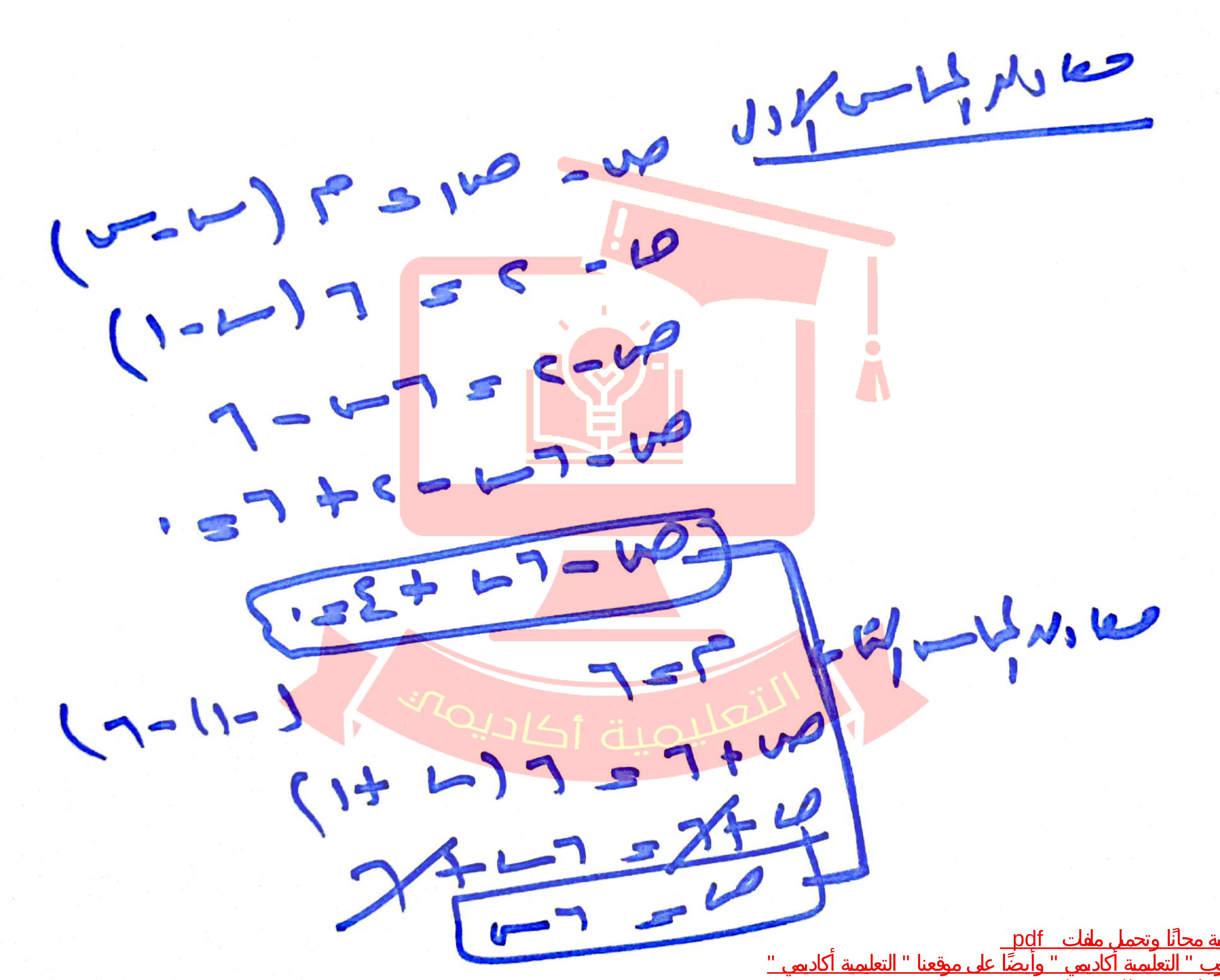
∴ س² = ١

س = ± ١

(١ ، ٢) | (−١ ، −٦)

م١ = ٦ | م٢ = ٦


معادلة المماس عند أ
ص - ص١ = م (س - س١)
ص - ٢ = ٦ (س - ١)
ص - ٢ = ٦س - ٦
ص - ٦س - ٢ + ٦ = ٠
ص - ٦س + ٤ = ٠
معادلة المماس عند ب
م = ٦
(-١، -٦)
ص + ٦ = ٦ (س + ١)
ص + ٦ = ٦س + ٦
ص = ٦س
التعليمية أكاديمي



معادلة المماس الأول

ص - ص١ = م (س - س١)

ص - ٢ = ٦ (س - ١)

ص - ٢ = ٦س - ٦

ص - ٦س - ٢ + ٦ = ٠

ص - ٦س + ٤ = ٠

معادلة المماس الثاني

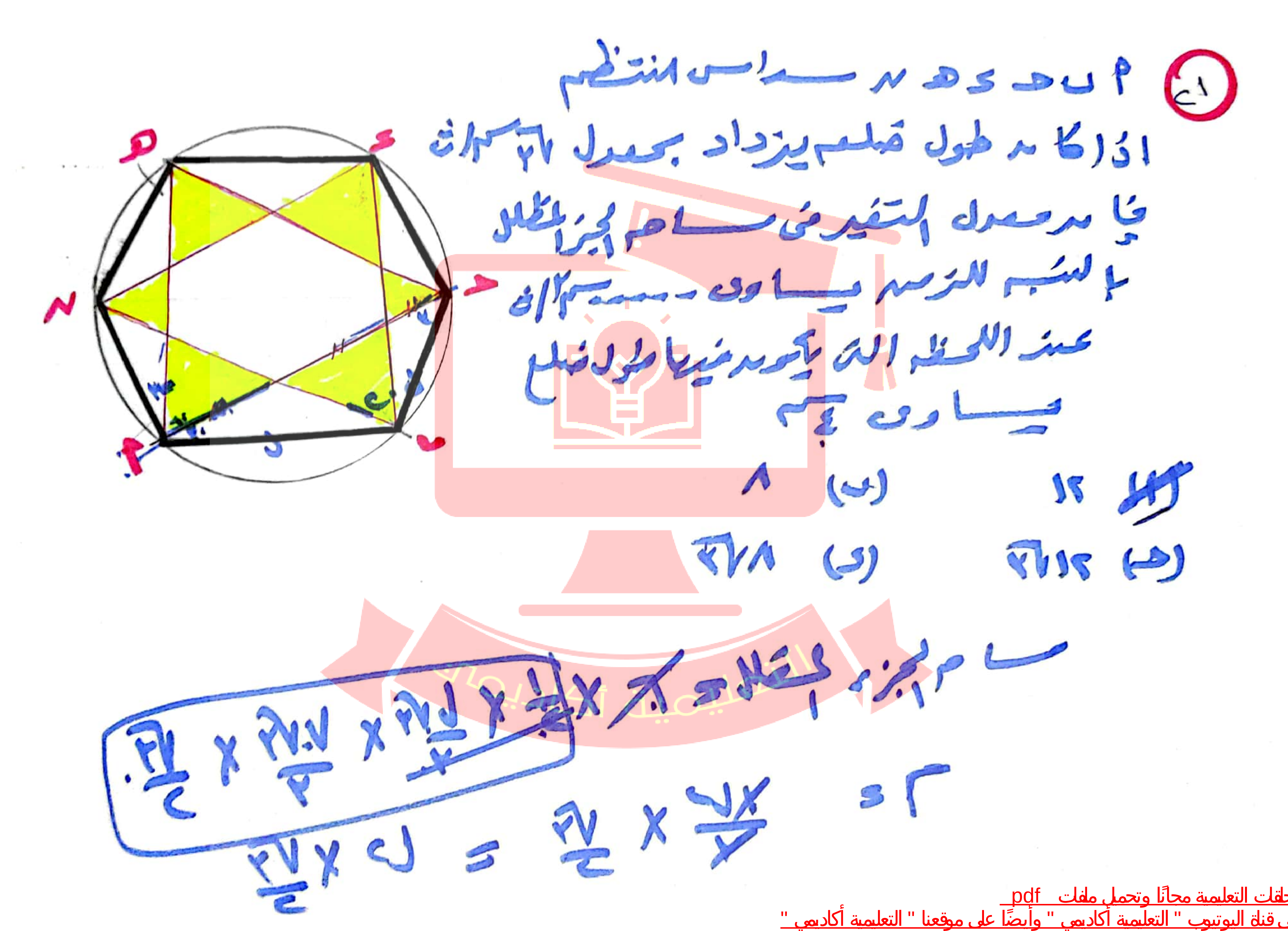
م = ٦

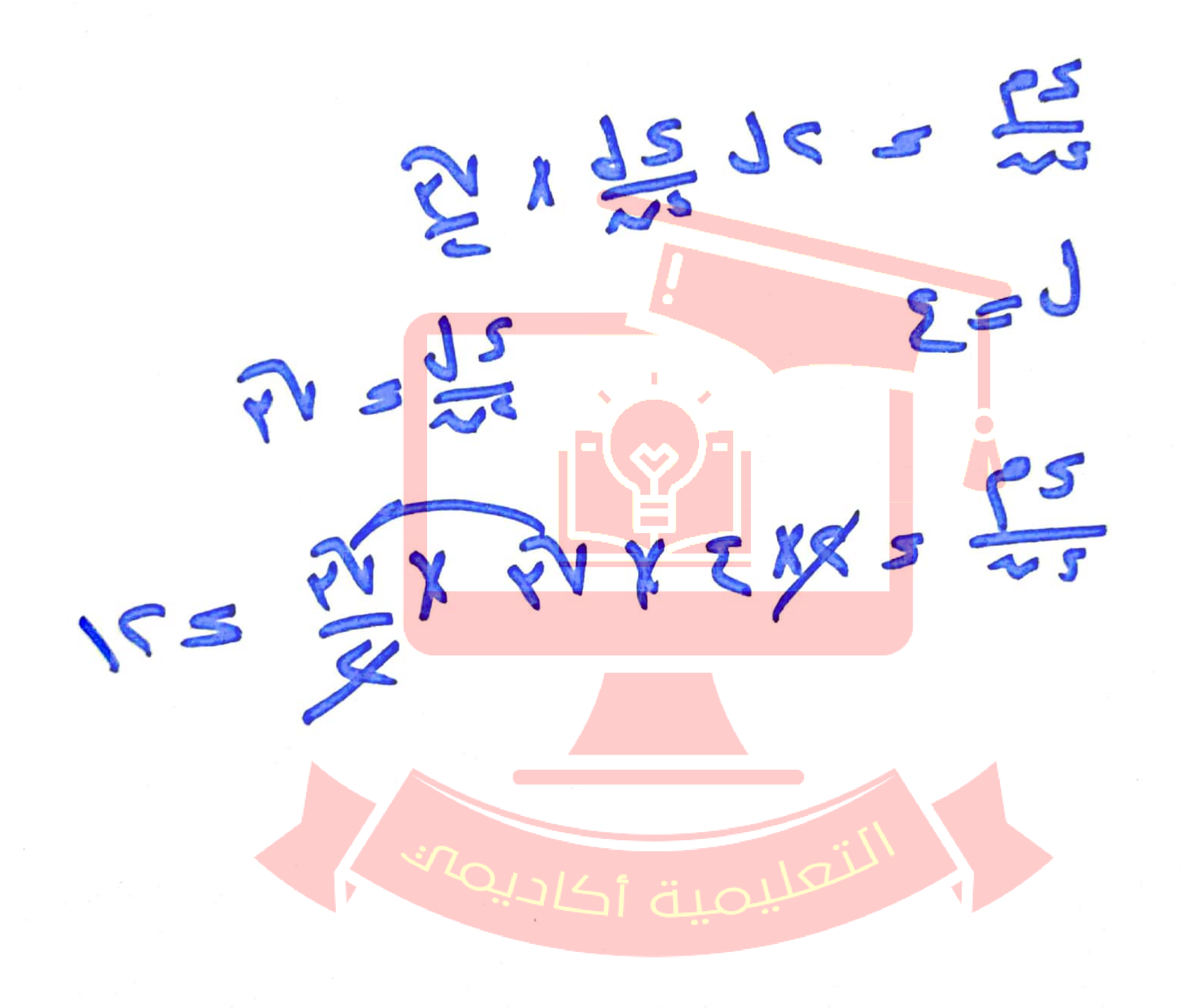
(-١، -٦)

ص + ٦ = ٦ (س + ١)

ص + ٦ = ٦س + ٦

ص = ٦س


٢١
أ ب جـ د هـ و سداسي منتظم
إذا كان طول ضلعه يزداد بمعدل ٢√٣ سم/ث
فإن معدل التغير في مساحة الجزء المظلل
بالشكل المرسوم يساوي ... سم²/ث
عند اللحظة التي يكون فيها طول ضلعه
يساوي ٤ سم
(أ) ١٢
(ب) ٨
(جـ) ١٢√٣
(د) ٨√٣
أ
ب
جـ
د
هـ
و



$\frac{دم}{دس} = ٢ل \times \frac{دل}{دس} \times \frac{٢٧}{٤}$

$ل = ٤$

$\frac{دل}{دس} = ٢٧$

$\frac{دم}{دس} = ٢ \times ٤ \times ٢٧ \times \frac{٢٧}{٤} = ١٢$